

Liczby algebraiczne.

Zad. 1. Znaleźć wielomian minimalny danej liczby algebraicznej:

- a) $\sqrt{2}$; b) i ; c) $4 + \sqrt{3}$; e) $\sqrt[3]{5}$;
f) $\sqrt{2} + \sqrt{3}$; g) $\sqrt{3} + \sqrt[4]{3}$; h) $\frac{\sqrt[4]{5}}{2}$.

Zad. 2. Znaleźć wielomian minimalny liczby $\sqrt{2} + \sqrt{5}$ nad danym ciałem:

- a) \mathbb{Q} b) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ c) $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$ d) $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$.

Zad. 3. Udowodnić, że liczba zespolona z jest algebraiczna wtedy i tylko wtedy gdy, gdy liczba \bar{z} jest algebraiczna.

Zad. 4. Udowodnić, że jeśli $a, b \in \mathbb{R}$, to liczba $a + bi$ jest algebraiczna wtedy i tylko wtedy gdy liczby a i b są algebraiczne.

Zad. 5. Udowodnić, że dla dowolnych $m \in \mathbb{Z}$ i $n \in \mathbb{N}$ liczby $\cos \frac{m}{n}\pi$ oraz $\sin \frac{m}{n}\pi$ są algebraiczne.

Zad. 6. Niech p będzie liczbą pierwszą. Określić stopień liczby algebraicznej $\epsilon = \cos \frac{2\pi}{p} + i \sin \frac{2\pi}{p}$.

Zad. 7. Uwolnić dane wyrażenie od niewymierności w mianowniku:

- a) $\frac{4+4\sqrt[3]{2}-15\sqrt[3]{4}}{3-5\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}}$; b) $\frac{14-6\sqrt[3]{2}-\sqrt[3]{4}}{4+\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}}$;
c) $\frac{5+9\sqrt{2}+3\sqrt{3}+5\sqrt{6}}{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}+\sqrt{6}}$; d) $\frac{2+3\sqrt{2}+4\sqrt{5}-11\sqrt{10}}{4-3\sqrt{2}-2\sqrt{5}-\sqrt{10}}$.

Zad. 8. Niech a będzie ustalonym pierwiastkiem wielomianu $f = x^3 - x^2 + 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$. Przedstawić poniższy iloraz w postaci $ra^2 + sa + t$ gdzie $r, s, t \in \mathbb{Q}$:

- a) $\frac{7a^3+5a+4}{a^2+a+1}$; b) $\frac{a^3-32a+37}{a^2+4a+8}$.